Cours de mathématiques
P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

LibreOffice 3.3

Fonctions vectorielles - Intégration

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$ de dimension finie p.
a et b sont deux réels tels que $a<b$. f est une application de $[a,b]$ dans E.

1. Approximation uniforme

Définition :

On dit que f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une subdivision $(a_0,\dots,a_N)$ de $[a,b]$, et des vecteurs $x_0,\dots,x_{p-1}$ de E, tels que $\forall i\in[\![0,p-1]\!]$, $f(t)=x_i$.
La subdivision $(a_0,\dots,a_N)$ est dite adaptée à f.

Définition :

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E, est dite en escalier sur I si et seulement si il existe un segment $[a,b]$ inclus dans I tel que :

1. La restriction de f au segment $[a,b]$ est en escalier sur ce segment
2. f est nulle en dehors du segment $[a,b]$.

Théorème : Approximation uniforme des fonctions en escalier (admis) :

Soit f une application continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans E.
Il existe une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Remarque :

Ce théorème permet de construire l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Théorème : Théorème de Stone-Weierstrass d'approximation uniforme par des polynômes (admis) :

Soit f une application continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il existe une suite de polynômes à coefficients réels convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

2. Définition de l'intégrale

2.1. Cas des fonctions en escalier

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Définition :

On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on note $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t)dt$, le vecteur $\sum_{i=0}^{p-1}(a_{i+1}-a_i)x_i$.

Remarques :

1. On démontre que ce vecteur est indépendant de la subdivision adaptée à f que l'on utilise.
2. $\int_a^b f$ ne dépend pas des valeurs prises en les points de la subdivision choisie.

Corollaire :

1. Si f est une fonction constante sur $]a,b[$ telle que $\forall t\in]a,b[$, $f(t)=C$, alors $\int_a^b f=(b-a)C$.
2. Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $[a,b]$ différant seulement en un nombre fini de points, alors elles ont même intégrale.

2.2. Cas des fonctions continues par morceaux

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$.

Théorème :

Soit (φ_n) une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$, convergeant uniformément vers f sr $[a,b]$.
Alors la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ est convergente, et sa limite ne dépend pas de la suite (φ_n) choisie.

Définition :

La limite de la suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ est appelée intégrale de f sur $[a,b]$, et est notée $\int_a^b f$, $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_a^b f(t)dt$.

3. Propriétés de l'intégrale

Dans ce paragraphe, f et g désignent deux fonctions de $\mathscr{C}_m^0([a,b],E)$.

Remarque :

Les propriétés suivantes se démontrent en utilisant la propriété similaire pour les fonctions en escalier, et en concluant par la théorème du paragraphe précédent.

Proposition :

1. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a f+\mu\int_a^b g$.
2. L'application $f\in\mathscr{C}_m^0([a,b],E)\mapsto\int_a^b f$ est une application linéaire de $\mathscr{C}_m^0([a,b],E)$ dans E.

Proposition : Inégalité triangulaire :

$\left\|\int_a^b f\right\|\leqslant\int_a^b\|f\|$.

Proposition :

Si f et g diffèrent seulement en un nombre fini de points de $[a,b]$, alors $\int_a^b f=\int_a^b g$.

Proposition : Relation de Chasles :

1. $\forall x\in[a,b]$, $\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$.
2. Soit $(a_0,\dots,a_p)$ une subdivision de $[a,b]$. Alors $\int_a^b f=\sum_{i=0}^{p-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f$.

4. Utilisation des composantes

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de $\mathscr{C}_m^0([a,b],E)$.

Proposition :

Si $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_r)$ est une base de E, et $f_1,\dots,f_r$ sont les applications composantes de f dans la base $\mathcal{B}$, alors $\int_a^b f=\sum_{i=1}^{r}\left(\int_a^b f_i\right)e_i$.

Remarque :

Cette proposition permet de se ramener au cas des fonctions scalaires.

Corollaire :

1. Si $E=\mathbb{C}$, $\int_a^b f=\int_a^b \Re e(f)+i\int_a^b \Im m(f)$.
2. Si $E=\mathbb{C}$, $\int_a^b \overline{f}=\overline{\int_a^b f}$

5. Inégalité de la moyenne

Dans ce paragraphe, f désigne une fonction de $\mathscr{C}_m^0([a,b],E)$.

Définition :

On appelle valeur moyenne de f le vecteur $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Proposition : Inégalité de la moyenne :

$\|\int_a^b f\|\leqslant\int_a^b\|f\|\leqslant(b-a)\|f\|_\infty$, où $\|f\|_\infty=\sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|$.

Proposition :

Soit $g\in\mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\left|\int_a^b g\,f\right|\leqslant\|f\|_\infty\int_a^b|g|$.

6. Théorème de Riemann-Lebesgue (hors programme)

Théorème : Théorème de Riemann-Lebesgue :

Soit $f\in\mathscr{C}_m^0([a,b],\mathbb{K})$. Alors $\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^b f(t)e^{ixt}dt=0$.

Preuve :

1. 1[er] cas : f est est fonction en escalier sur $[a,b]$. Soit $(a_0,\dots,a_p)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\forall k\in[\![0,p-1]\!]$, $\exists\alpha_k\in\mathbb{K}$ tel que $\forall x\in]a_k,a_{k+1}[$, $f(x)=\alpha_k$.

   $$\int_a^b f(t)e^{ixt}dt=\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\alpha_k e^{ixt}dt\underset{x\neq0}{=}\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k\left[\frac{e^{ixt}}{ix}\right]_{a_k}^{a_{k+1}}=\frac{1}{ix}\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k\left(e^{ia_{k+1}x}-e^{ia_kx}\right).$$

   Donc $\left|\int_a^b f(t)e^{ixt}dt\right|\leqslant\frac{2}{|x|}\sum_{k=0}^{p-1}\alpha_k\underset{x\to\infty}{\to}0$.
2. 2[ème] cas : Cas général. $\exists(\varphi_n)\in\left[E([a,b],\mathbb{K})\right]^{\mathbb{N}}$ telle que (φ_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

   Soit $x>0$. On pose $F_n(x)=\int_a^b\varphi_n(t)e^{ixt}dt$, et $F(x)=\int_a^b f(t)e^{ixt}dt$.

   D'après le premier cas, $\lim\limits_{x\to\infty}F_n(x)=0$, à n fixé.

   $$|F_n(x)-F(x)|=\left|\int_a^b(\varphi_n(t)-f(t))e^{ixt}\right|\leqslant\int_a^b|\varphi_n(t)-f(t)||e^{ixt}|dt,\text{ or } |e^{ixt}|=1.$$

   $$\leqslant\int_a^b\|\varphi_n-f\|_{\infty,[a,b]}dt=(b-a)\|\varphi_n-f\|_{\infty,[a,b]}\underset{n\to\infty}{\to}0,\text{ sans dépendre de } x.$$

   Donc (F_n) converge uniformément vers F sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to\infty}F_n(x)=0$.

   Donc par théorème, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=0$.

* * * * *